

VỀ TÍNH LIÊN THÔNG CỦA ĐỒ THỊ GIAO HOÁN CỦA VÀNH MA TRẬN $M_p(GF(q^N))$

Cao Minh Nam

Phân hiệu tại Thành phố Hồ Chí Minh, Trường Đại học Giao thông vận tải
450-451 Đường Lê Văn Việt, Phường Tăng Nhơn Phú, TP. Hồ Chí Minh, Việt Nam

Email: namcm@utc.edu.vn

(Ngày nhận bài: 11/2/2025, ngày nhận bài chỉnh sửa: 17/3/2025, ngày duyệt đăng: 17/9/2025)

TÓM TẮT

Cho R là một vành không giao hoán có đơn vị. Đồ thị giao hoán liên kết với R , kí hiệu $\Gamma(R)$, là một đồ thị đơn, vô hướng và có tập đỉnh là $R \setminus Z(R)$, trong đó hai đỉnh phân biệt x, y của đồ thị kề nhau khi và chỉ khi $xy = yx$. Trong bài báo này, tác giả nghiên cứu về tính liên thông của đồ thị giao hoán liên kết với vành ma trận có bậc nguyên tố trên trường $GF(q^N)$, trong N là một số Steinitz. Cụ thể, cho trước p là một số nguyên tố lớn hơn 2, tác giả chứng minh được rằng đồ thị $\Gamma(M_p(GF(q^N)))$ không liên thông khi và chỉ khi $\exp_N p$ hữu hạn.

Từ khóa: Số Steinitz, đại số ma trận, trường hữu hạn địa phương, đồ thị giao hoán

1. Giới thiệu

Cho R là một vành không giao hoán có đơn vị. Tập hợp

$Z(R) = \{a \in R \mid ax = xa, \forall x \in R\}$ được gọi tâm của vành R . Đồ thị giao hoán liên kết với R , kí hiệu $\Gamma(R)$, là một đồ thị đơn, vô hướng với tập đỉnh $V(\Gamma(R)) = R \setminus Z(R)$ và hai đỉnh phân biệt x, y kề nhau nếu $xy = yx$. Một đường đi của đồ thị $\Gamma(R)$ là một dãy hữu hạn các đỉnh phân biệt có dạng

$$x_1 \sim x_2 \sim \dots \sim x_{k+1},$$

trong đó hai đỉnh liên tiếp kề nhau. Lúc này, k được gọi là độ dài của đường đi. Hai đỉnh của một đồ thị được gọi là liên thông nếu tồn tại một đường đi nối chúng. Nếu hai đỉnh x và y liên thông thì đường đi có độ dài nhỏ nhất nối x, y được gọi là đường trắc địa và độ dài của nó được gọi là khoảng cách giữa hai đỉnh, kí hiệu $d(x, y)$. Một đồ thị được gọi là liên thông

nếu với hai đỉnh phân biệt bất kì của nó luôn tồn tại một đường đi nối chúng. Ngược lại, ta nói đồ thị không liên thông. Kí hiệu $\text{diam}(\Gamma(R))$ là đường kính của đồ thị $\Gamma(R)$ và được xác định bởi

$$\text{diam}(\Gamma(R)) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in V(\Gamma(R)), x \neq y\}.$$

Dễ thấy, nếu $\Gamma(R)$ không liên thông thì $\text{diam}(\Gamma(R)) = \infty$.

Vấn đề về tính liên thông của một đồ thị giao hoán liên kết với một vành không giao hoán, đặc biệt là vành các ma trận vuông trên một trường, đã được nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm. Một trong số các kết quả nổi bật về hướng nghiên cứu này có thể được nói đến như sau: cho F là một trường hữu hạn và $n \geq 3$. Khi đó, $\Gamma(M_n(F))$ không liên thông khi và chỉ khi n là một số nguyên tố (xem [1], Hệ quả 7). Trong bài báo này, tác giả tiếp tục phát triển kết quả

trên cho các trường hữu hạn địa phương. Cụ thể, N là một số Steinitz và p là số nguyên tố lớn hơn 2, điều kiện cần và đủ để $\Gamma\left(M_p(GF(q^N))\right)$ không liên thông là chỉ số lũy thừa thứ p của N hữu hạn (xem Định lý 5.3).

Nhắc lại rằng một trường là *hữu hạn địa phương* nếu mọi trường con sinh bởi hữu hạn các phần tử đều hữu hạn. Trong bài báo này kí hiệu q luôn được dùng để chỉ một số nguyên dương. Hơn nữa, hầu hết các kí hiệu được sử dụng trong bài báo này là các kí hiệu thông thường. Chẳng hạn như: n là một số nguyên dương, F là một trường, $\text{char } F$ là đặc trưng của F và $M_n(F)$ là vành ma trận vuông cấp n trên F . Đối với các số Steinitz, các chữ cái in hoa, chẳng hạn $N, M, \dots$ sẽ được dùng để kí hiệu chúng.

2. Tổng quan nghiên cứu

Vấn đề về tính liên thông của đồ thị giao hoán liên kết với vành không giao hoán, đặc biệt là vành các ma trận vuông trên một trường, đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Một số kết quả nổi bật có thể được nói đến như sau:

- Các tác giả Akbari, Bidkhorri và Mohammadian (2008) đã chứng minh rằng đồ thị giao hoán của vành ma trận cấp 2 trên một trường bất kì đều không liên thông.

- Cũng trong nghiên cứu này, các tác giả trên cũng đã chỉ ra một điều kiện cần và đủ để đồ thị giao hoán của vành ma trận trên trường hữu hạn không liên thông, cụ thể: đồ thị không liên thông khi và chỉ khi bậc của vành ma trận là một số nguyên tố.

3. Phương pháp nghiên cứu

Bài báo chủ yếu sử dụng phương pháp nghiên cứu lí thuyết:

- Nghiên cứu tài liệu, tổng hợp và phân tích các kết quả đã có về đồ thị giao hoán và tính liên thông.

- Sử dụng các công cụ của đại số, lí thuyết trường và lí thuyết số.

4. Số Steinitz và bao đóng đại số của trường hữu hạn

Cho mở rộng trường E/F . Dễ thấy E là một không gian vectơ trên F . Kí hiệu $[E:F]$ được dùng để chỉ số chiều của E trên F , nói cách khác $[E:F] = \dim_F E$. Nếu $[E:F] = n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta nói E là một *mở rộng bậc n* của F . Cho K là một trường trung gian của E/F . Nếu

$$F \subsetneq K \subsetneq E$$

thì ta nói K là một *trường trung gian thực sự* của E/F . Các Mệnh đề 4.1 và Mệnh đề 4.2 dưới đây nhắc lại một số tính chất quan trọng của tháp mở rộng trường.

Mệnh đề 4.1. Cho $F \leq K \leq E$ là các trường. Khi đó, $[E:F] = [E:K][K:F]$. Hơn nữa, $[E:F]$ hữu hạn khi và chỉ khi $[E:K]$ và $[K:F]$ đều hữu hạn.

Chứng minh. Xem [2], Mệnh đề 1.2, tr. 224.

Mệnh đề 4.2. Cho $F \leq K \leq E$ là các trường. Khi đó, E đại số trên F khi và chỉ khi E đại số trên K và K đại số trên F .

Chứng minh. Xem [2], Mệnh đề 1.7, tr. 228.

Mệnh đề dưới đây cho ta một điều kiện để xác định tính hữu hạn địa phương của một trường dựa vào trường con nguyên tố của nó.

Mệnh đề 4.3. Một trường F là hữu hạn địa phương khi và chỉ khi F có đặc trưng nguyên tố và đại số trên trường con nguyên tố của nó.

Chứng minh. Gọi P trường con nguyên tố của F . Nếu F hữu hạn địa phương thì P hữu hạn, vì thế char $F = p$ với p là một số nguyên tố nào đó. Lấy $a \in P$. Khi đó trường con sinh bởi P và a là hữu hạn vì F hữu hạn địa phương. Từ đây, $P(a)$ hữu hạn chiều như là một P -không gian. Hơn nữa, vì mọi mở rộng hữu hạn đều là mở rộng đại số nên a đại số trên P , và từ đây F đại số trên P .

Ngược lại, giả sử char $F = p$ và F đại số trên P . Khi đó, trường P hữu hạn. Lấy các phần tử $a_1, \dots, a_k \in F$. Đặt

$$F_i = P(a_1, \dots, a_i) \text{ với } 1 \leq i \leq k.$$

Dễ thấy rằng với mỗi $1 \leq i \leq k-1$, phần tử a_{i+1} đại số trên P và vì thế a_{i+1} cũng đại số trên $P(a_1, \dots, a_i)$. Do đó,

$$\begin{aligned} [F_{i+1}:F_i] \\ = [P(a_1, \dots, a_i)(a_{i+1}):P(a_1, \dots, a_i)] \\ < \infty \end{aligned}$$

và $[F_1:P] = [P(a_1):P] < \infty$. Áp dụng Mệnh đề 4.1, ta thu được:

$$[F_k:P] = [F_k:F_{k-1}] \dots [F_2:F_1][F_1:P] < \infty.$$

Điều này có nghĩa là $P(a_1, \dots, a_k)$ là một mở rộng hữu hạn của P . Do đó, $P(a_1, \dots, a_k)$ hữu hạn, và từ đây ta có thể kết luận F là trường hữu hạn địa phương.

Hệ quả 4.4. Mọi mở rộng đại số của một trường hữu hạn địa phương đều hữu hạn địa phương.

Chứng minh. Gọi F là một trường hữu hạn địa phương và P là trường con nguyên tố của F . Vì F hữu hạn địa

phương nên char $P = p$ với p là một nguyên tố nào đó. Tiếp theo, gọi E là một mở rộng đại số của F . Khi đó, dễ thấy P cũng là trường con nguyên tố của E . Theo Mệnh đề 4.3, F đại số trên P . Hơn nữa, vì E đại số trên F nên theo Mệnh đề 4.2, E cũng đại số trên P . Tiếp tục áp dụng Mệnh đề 4.3, ta kết luận được rằng E là trường hữu hạn địa phương.

Tiếp theo, tác giả giới thiệu một cách ngắn gọn về một phương pháp để xác định bao đóng đại số của một trường hữu hạn. Gọi $GF(q)$ là một trường có q phần tử, trong đó $q \in \mathbb{N}^*$. Đặt

$$\Gamma(q) = \bigcup_{n=1}^{\infty} GF(q^{n!}).$$

Rõ ràng, $\Gamma(q)$ là một trường. Hơn nữa, $\Gamma(q)$ chính là bao đóng đại số của $GF(q)$ (xem [3], Định lý 9.8.1). Để mô tả các trường con của $\Gamma(q)$, ta cần sử dụng khái niệm về số nguyên dương mở rộng hay số Steinitz (xem [4]). Cụ thể, kí hiệu $\mathbb{P}$ là tập hợp của tất cả các số nguyên tố. Một tích hình thức vô hạn có dạng

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p},$$

trong đó các số mũ $r_p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ với mọi $p \in \mathbb{P}$ được gọi là một số Steinitz (hay số siêu tự nhiên). Tập hợp các số Steinitz được kí hiệu là $\mathbb{SN}$. Dễ thấy tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ là tập con của $\mathbb{SN}$, bởi vì mỗi số nguyên dương đều có dạng của một số Steinitz với hầu hết các số mũ r_p bằng 0, ngoại trừ một số hữu hạn các r_p khác 0.

Cho hai số Steinitz $N = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p}$ và $M = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{k_p}$. Ta định nghĩa $N = M$

khi và chỉ khi $r_p = k_p$ với mọi $p \in \mathbb{P}$.

Tích của N và M được xác định bởi

$$NM = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p + k_p},$$

trong đó phép cộng số mũ được hiểu theo nghĩa thông thường cùng quy ước

$$n + \infty = \infty$$

cho mọi $n \in \mathbb{N}$. Ngoài ra, nếu $r_p \leq k_p$ với mọi $p \in \mathbb{P}$, ta nói N chia hết M hay N là ước của M , kí hiệu $N|M$. Khi đó, thương của M chia cho N được định nghĩa là

$$\frac{M}{N} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p - k_p}$$

với phép trừ số mũ cũng được hiểu theo nghĩa thông thường cùng các quy ước $\infty - \infty = 0$ và $\infty - n = \infty$ cho mọi số tự nhiên n . Ngược lại, nếu tồn tại số nguyên tố p sao cho $r_p > k_p$ thì ta nói N không chia hết M hay N không là ước của M . Dễ thấy, quan hệ chia hết được định nghĩa như trên biến $\mathbb{SN}$ thành một tập hợp được sắp thứ tự, trong đó phần tử lớn nhất là $I = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^\infty$ và phần tử nhỏ nhất là 1.

Cho N là một số Steinitz. Đặt

$$GF(q^N) = \bigcup_{d|N} GF(q^d).$$

Khi đó, $GF(q^N)$ là một trường và đồng thời là một mở rộng đại số của $GF(q)$ (xem [3], tr. 221). Ngoài ra, tập hợp các số Steinitz $\mathbb{SN}$ cũng xác định cấu trúc của tất cả các trường con của $\Gamma(q)$ chứa $GF(q)$. Khẳng định này là nội dung chính của định lý dưới đây.

Định lý 4.5. Cho ánh xạ f từ $\mathbb{SN}$ vào tập tất cả các trường con của $\Gamma(q)$ xác định bởi

$$f(N) = GF(q^N), \forall N \in \mathbb{SN}.$$

Khi đó, f là một song ánh. Hơn nữa, nếu N và M là hai số Steinitz thì các khẳng định sau đây đúng:

a) $GF(q^N)$ hữu hạn khi và chỉ khi N hữu hạn.

b) $GF(q^N) \leq GF(q^M)$ khi và chỉ khi $N|M$.

Chứng minh. Xem ([3], Định lý 9.8.4).

Từ Định lý 4.5 và Mệnh đề 4.3, ta suy ra được rằng với mỗi trường hữu hạn địa phương F , luôn tồn tại số Steinitz N sao cho $F \cong GF(p^N)$ với $p = \text{char } F$. Ngoài ra, một hệ quả phức tạp hơn của Định lý 4.5 được trình bày qua định lý sau đây.

Định lý 4.6. Cho N và M là hai số Steinitz sao cho N là ước của M . Khi đó, $[GF(q^M):GF(q^N)]$ hữu hạn khi và chỉ khi thương $\frac{M}{N}$ hữu hạn, trong trường hợp đó hai số này bằng nhau.

Chứng minh. Xem [3], Bài tập 26, tr. 224.

5. Đồ thị giao hoán

Một trong các kết quả nổi bật mở đầu cho hướng nghiên cứu về đồ thị giao hoán liên kết vành ma trận là mọi đồ thị giao hoán liên kết với vành ma trận cấp 2 trên một trường bất kì đều không liên thông (xem [1], phần bình luận trước Lemma A). Do đó, khi nghiên cứu về tính liên thông của một đồ thị giao hoán của một vành ma trận trên trường, ta chỉ xét các số tự nhiên $n \geq 3$. Hơn nữa, cũng trong bài báo này, một kết quả nổi bật về điều kiện cần và đủ để một đồ thị không liên thông cũng được các tác giả chỉ ra.

Định lí 5.1. Cho F là một trường và $n \geq 3$. Đồ thị $\Gamma(M_n(F))$ không liên thông khi và chỉ khi tồn tại một mở rộng bậc n của F mà không chứa trường con trung gian thực sự.

Chứng minh. Xem [1], Định lí 6.

Đối với các trường hữu hạn, điều kiện cần và đủ để một đồ thị không liên thông đã được chỉ ra một cách đơn giản hơn như là một hệ quả của Định lí 5.1. Để tiện cho việc trình bày của bài báo, tác giả sẽ phát biểu và chứng minh chi tiết kết quả này thông qua định lí dưới đây.

Định lí 5.2. Cho F là một trường hữu hạn và $n \geq 3$. Khi đó, $\Gamma(M_n(F))$ không liên thông khi và chỉ khi n là một số nguyên tố.

Chứng minh. Nếu $\Gamma(M_n(F))$ không liên thông thì theo Định lí 5.1, tồn tại mở rộng bậc n của F không chứa trường con trung gian thực sự. Gọi E là một mở rộng trường như thế của F và gọi m là một ước nguyên dương của n . Theo Định lí 9.3.1 trong [2], tồn tại trường trung gian K của E/F sao cho $[K:F] = m$. Vì E/F không chứa trường trung gian thực sự nên $m = 1$ hoặc $m = n$. Do đó, n là số nguyên tố.

Để chỉ ra chiều ngược lại, gọi E là một mở rộng bậc n của F . Chúng ta chú ý rằng vì F là trường hữu hạn nên luôn tồn tại một mở rộng như thế theo Định lí 9.3.1 trong [2]. Gọi K là một trường trung gian của E/F . Khi đó,

$$n = [E:F] = [E:K][K:F]$$

theo Mệnh đề 4.1. Nếu n nguyên tố thì $K = E$ hoặc $K = F$ và vì thế E/F không

chứa trường con trung gian thực sự. Do đó, $\Gamma(M_n(F))$ không liên thông theo Định lí 5.1.

Cho N là một số Steinitz có dạng $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p}$. Đặt $\exp_N p = r_p$ là chỉ số lũy thừa thứ p của N . Cuối cùng, chúng ta đến kết quả chính của bài báo.

Định lí 5.3. Cho p là một số nguyên tố lớn hơn 2 và N là một số Steinitz. Khi đó, đồ thị $\Gamma(M_p(GF(q^N)))$ không liên thông khi và chỉ khi $\exp_N p < \infty$.

Chứng minh. Nếu $\Gamma(M_p(GF(q^N)))$ không liên thông thì theo Định lí 5.1 tồn tại một mở rộng trường $F/GF(q^N)$ bậc p và không chứa trường con trung gian thực sự. Khi đó, dễ thấy F là một mở rộng đại số của $GF(q)$. Mặt khác, vì $\Gamma(q)$ là một bao đóng đại số của $GF(q)$ nên theo Định lí 4.5, $F \cong GF(q^M)$ với M là một số Steinitz nào đó. Tiếp theo, đặt $M = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{k_p} \in \mathbb{SN}$ và

$$N = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{r_p}.$$

Khi đó, $[GF(q^M):GF(q^N)] = p$. Theo Định lí 4.6, $\frac{M}{N} = p$. Từ đây, ta có

$$r_{p'} = k_{p'}$$

với mọi $p' \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$ và $1 + r_p = k_p$. Giả sử $r_p = \infty$. Khi đó,

$$k_p = 1 + r_p = \infty$$

và vì thế $M = N$. Từ đây,

$$p = [GF(q^M):GF(q^N)] = 1$$

và điều này mâu thuẫn với giả thiết p là số nguyên tố. Vì vậy, ta kết luận được $r_p < \infty$ và do đó $\exp_N p$ hữu hạn.

Đối với chiều ngược lại, ta giả sử $\exp_N p < \infty$. Đặt $M = Np$. Khi đó,

$$\frac{M}{N} = p$$

và theo Định lí 4.6, $GF(q^M)$ là một mở rộng bậc p của $GF(q^N)$. Hơn nữa, $GF(q^M)/GF(q^N)$ không chứa trường

con trung gian thực sự nào do p nguyên tố. Vì vậy, $\Gamma(M_p(GF(q^M)))$ không liên thông theo Định lí 5.1 và ta có điều phải chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. S. Akbari, H. Bidkhori, and A. Mohammadian, “Commuting Graphs of Matrix Algebras,” *Communications in Algebra*, pp. 988-994, 2008.
- [2]. S. Lang, *Algebra*, Newyork: Springer-Verlag, 2002.
- [3]. S. Roman, *Field Theory*, Springer Science & Business Media, 2005.
- [4]. E. Steinitz, “Algebraische Theorie der Korper,” *J. reine angew. Math.*, Vol. 137, pp. 167-309, 1910.

ON THE CONNECTIVITY OF THE COMMUTING GRAPH OF THE MATRIX RING $M_p(GF(q^N))$

Cao Minh Nam

Campus in Ho Chi Minh City, University of Transport and Communications
450-451 Le Van Viet Street, Tang Nhon Phu Ward, Ho Chi Minh City, Vietnam

Email: namcm@utc.edu.vn

(Received: 11/2/2025, Revised: 17/3/2025, Accepted for publication: 17/9/2025)

ABSTRACT

Let R be a noncommutative ring with identity. The commuting graph associated with R , denoted by $\Gamma(R)$, is a simple, undirected graph with the vertex set $R \setminus Z(R)$, where two distinct vertices x, y are adjacent if and only if $xy = yx$. In this paper, we study the connectivity and estimate the diameter of the commuting graph associated with the matrix ring of prime degree over the field $GF(q^N)$, where N is a Steinitz number. Specifically, given p as a prime number greater than 2, we show that the graph $\Gamma(M_p(GF(q^N)))$ is disconnected if and only if $\exp_F n$ is finite.

Keywords: Steinitz number, matrix algebra, locally finite field, commuting graph